

BOOK IN PROGRESS
MATEMATICA

GEOMETRIA
PRIMO ANNO
TOMO NR. 1

Book in Progress

SOMMARIO DEL TOMO 1

UNITÀ 1: LA GEOMETRIA DEL PIANO

1.1 Generalità	pag. 1
1.2 Figure congruenti	pag. 11
1.3 Operazioni con i segmenti	pag. 13
1.4 Operazioni con gli angoli	pag. 17
1.5 Angoli particolari	pag. 20

UNITÀ 2: I TRIANGOLI

2.1 I poligoni	pag. 25
2.2 I triangoli	pag. 28
2.3 Classificazione dei triangoli rispetto ai lati	pag. 29
2.4 La congruenza dei triangoli	pag. 30
2.5 Le disuguaglianze nei triangoli	pag. 40
2.6 Classificazione dei triangoli rispetto agli angoli	pag. 42
... E ORA I PROBLEMI	pag. 48

ESERCIZI UNITÀ 1 – 2: La geometria del piano – I triangoli.

Conoscenza e comprensione	pag. 59
Esercizi. La geometria del piano	pag. 69
Ampiezza di un angolo	pag. 82
Operazioni tra angoli	pag. 83
Problemi sui segmenti	pag. 92
Problemi sugli angoli	pag. 93
I triangoli	pag. 95
Problemi sulla congruenza	pag. 98
Problemi sulla disuguaglianza nei triangoli	pag. 103
CORRO ALLE OLIMPIADI!	pag. 104

UNITÀ 3: PERPENDICOLARITÀ E PARALLELISMO

3.1 Rette perpendicolari	pag. 106
3.2 Le proiezioni ortogonali	pag. 110
3.3 Mediane, altezze e bisettrici di un triangolo	pag. 113
3.4 Le rette parallele	pag. 116
3.5 Il criterio di parallelismo e le proprietà delle rette parallele	pag. 119
3.6 Proprietà dei triangoli	pag. 125
3.7 Somma degli angoli interni ed esterni di un poligono	pag. 127
3.8 La congruenza nei triangoli rettangoli	pag. 129
3.9 I luoghi geometrici	pag. 131
I PROBLEMI	pag. 135

ESERCIZI UNITÀ 3: Perpendicolarità e parallelismo

Conoscenza e comprensione	pag. 142
Applicazioni	pag. 150
Costruzione, con riga e squadra, della perpendicolare ad una retta data	pag. 151
Altezze, mediane, bisettrici e assi di un triangolo	pag. 155
Costruzione, con riga e squadra, della parallela ad una retta data	pag. 159
Angoli di un triangolo	pag. 163
Criteri di congruenza dei triangoli (rettangoli e non)	pag. 166
PROBLEMI	pag. 168
OCCHIO ALLE OLIMPIADI!	pag. 186

PRESENTAZIONE

Un gruppo di docenti di matematica, facenti parte di istituzioni scolastiche aderenti alla rete nazionale denominata “Book in Progress”, in seguito, già, alla circolare n. 16 del 10 febbraio 2009 sulle adozione dei libri di testo, ha inteso proporre un testo da loro scritto, “Dispense di Matematica”, quale strumento funzionale al conseguimento degli obiettivi didattici e formativi della disciplina.

Il testo, accanto ai contenuti propri della disciplina, riporta attività e propone azioni (esercizi di diversa tipologia: *di completamento, del tipo vero/falso, a scelta multipla, di PROVA TU*), frutto dell’esperienza didattica degli autori e ciò dovrebbe “accompagnare” i percorsi di apprendimento dei singoli studenti, contribuendo ad assicurare sistematicità e coerenza all’operato quotidiano.

Con questo lavoro, che potrà arricchirsi dei completamenti di volta in volta eventualmente necessari e proposti dai docenti “in rete”, si è inteso offrire uno strumento che guardasse costantemente agli alunni, che li avviasse al gusto del costruire insieme, del verificare, del dimostrare, attraverso una metodologia attiva o, più precisamente, interattiva, in una classe vista sempre più come laboratorio.

Il linguaggio?

Lo sforzo è stato quello di “parlare” di matematica, cercando di non parlare difficile.

Per la geometria, in particolare, si è voluto un po’ “dilatare” il tempo di permanenza nella geometria intuitiva o, più spesso, cercare l’integrazione del metodo intuitivo e di quello razionale.

Gli alunni vengono sollecitati, inizialmente, in esercizi di disegno, in costruzioni di figure precise e nel riconoscimento di alcune loro proprietà mediante misure, scomposizioni in parti, sovrapposizioni, ricorso alla carta millimetrata “avvertiti”, però, che il disegno ha lo scopo di aiutarci a visualizzare concetti e situazioni e **mai** sostituire la dimostrazione razionale di un’affermazione.

Le “Dispense di matematica” vogliono essere il compagno di banco e ... di vita dell’alunno, almeno nell’intenzione e nell’ambizione dei proponenti, convinti che l’importanza del “modo” di fare scuola, dei tempi necessari per il “farlo”, degli “spazi”, degli “strumenti” e degli “ambienti” siano le variabili responsabili più importanti degli eventuali successi/insuccessi scolastici.

LA GEOMETRIA DEL PIANO

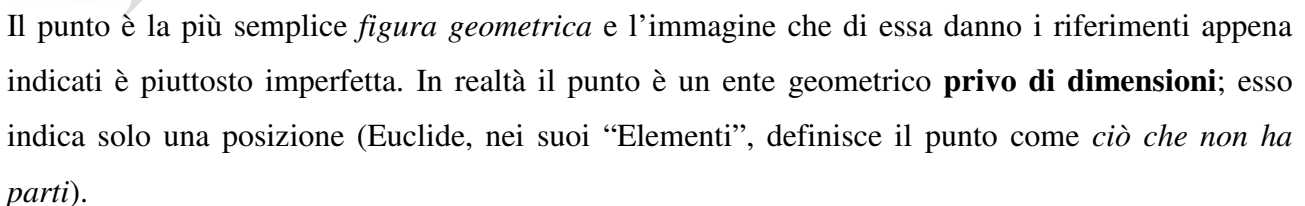
Nello studio della geometria euclidea (da Euclide, matematico greco del III secolo a.C.) assume un ruolo fondamentale il disegno delle varie figure. A tale scopo, useremo **sempre** squadra e compasso e **costruiremo le nostre figure con la massima attenzione e precisione.**

Per descriverli utilizzeremo delle **definizioni**. Una definizione è una frase nella quale viene associato un nome a un ente e vengono elencate le sue caratteristiche.

Un parallelogramma è un quadrilatero che ha i lati opposti paralleli.

In geometria consideriamo come enti primitivi:

- L'idea di **punto** ci è suggerita dal segno lasciato dalla punta della matita o dal forellino praticato con un sottile spillo su un foglio di carta, da un granellino di sabbia, da una stella lontanissima, etc.



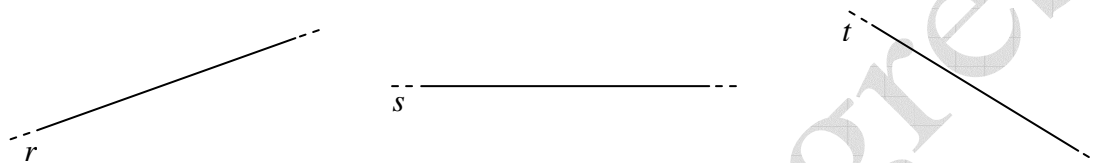
• A • B •
• C •

Un insieme qualsiasi di punti costituisce una *figura geometrica*; lo *spazio* è l'insieme di tutti i punti e contiene quindi tutte le figure.

Una figura che appartiene ad un piano si chiama *figura piana*, altrimenti si chiama *figura solida*.

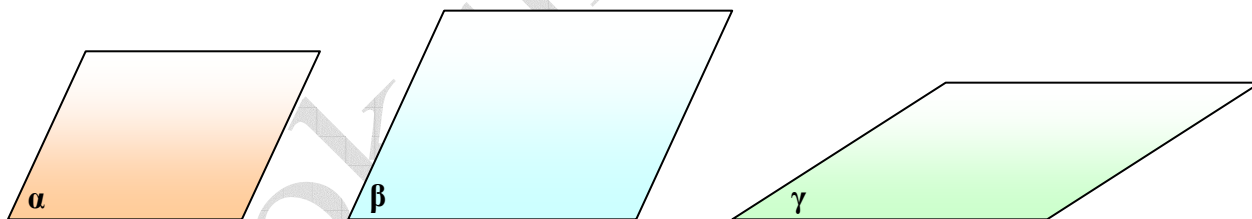
Come modello intuitivo di **retta** possiamo pensare al bordo di una riga da disegno, idealmente illimitata da entrambe le parti. La retta geometrica si deve, infatti, pensare illimitata e senza spessore: è costituita da infiniti punti ed ha **un'unica dimensione** (si estende solo in lunghezza, illimitatamente).

Per distinguere una retta dall'altra, si pone accanto a ciascuna di esse una lettera minuscola dell'alfabeto; diremo perciò: retta r ; retta s ; retta t ; etc.



Come modello intuitivo di **piano** possiamo pensare ad un sottile foglio di carta o alla superficie dell'acqua stagnante di un lago. Si tratta, naturalmente, di immagini molto approssimative perché il piano geometrico, oltre a non avere spessore, si deve pensare indefinitamente esteso in lunghezza e larghezza: ha, cioè, **due dimensioni**.

I piani si indicano generalmente con le lettere dell'alfabeto greco; diremo perciò: piano α ; piano β ; piano γ ; etc.



Nella geometria razionale si vogliono ricavare, mediante deduzioni¹, delle proprietà da altre proprietà. Come per gli enti primitivi, bisogna, quindi, accettare che alcune proprietà vengano assunte come primitive, ossia non siano dedotte ma accettate come vere (**postulati** o **assiomi**). Le proprietà (o proposizioni) che si possono desumere dagli assiomi si dicono **teoremi**; un teorema è quindi una proposizione di cui bisogna *controllare* la verità mediante un ragionamento (**dimostrazione**). Una dimostrazione è, pertanto, una sequenza di deduzioni che, partendo da affermazioni considerate vere (**ipotesi**), fa giungere ad una nuova affermazione (**tesi**).

In seguito scriveremo spesso l'enunciato dei teoremi mediante la struttura linguistica “se , allora”.

¹procedimenti logici consistenti nel derivare, da una o più premesse date, una conclusione come conseguenza logicamente necessaria.

La frase che segue il “se” è l’ipotesi, ossia ciò che supponiamo vero; quella dopo “allora” è la tesi, ossia l’affermazione da dimostrare.

Dimostrazione diretta

Una dimostrazione è *diretta* quando, partendo dall’ipotesi ed utilizzando eventualmente postulati e/o proprietà dimostrate in precedenza, si perviene, attraverso una sequenza di deduzioni logiche, alla tesi.

Dimostrazione indiretta o per assurdo

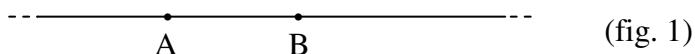
Una dimostrazione è *indiretta* o *per assurdo* quando, partendo dalla negazione della tesi ed utilizzando eventualmente postulati e/o proprietà dimostrate in precedenza, si perviene, attraverso una sequenza di deduzioni logiche, a qualche proprietà che è in contrasto con l’ipotesi data o con postulati o con teoremi già dimostrati (*contraddizione*). Bisogna, quindi, concludere che l’aver supposto falsa la tesi è sbagliato e che, di conseguenza, la tesi è vera (*principio di non contraddizione*: una proposizione non può contemporaneamente essere vera e falsa).

Se in un teorema vengono scambiate l’ipotesi e la tesi, si ottiene la proposizione inversa che prende il nome di **teorema inverso**.

Un teorema che è immediata conseguenza di un altro teorema viene chiamato **corollario**.

Riportiamo ora di seguito alcuni postulati che caratterizzano i punti, le rette e i piani.

- **Dati due qualunque punti distinti A e B, esiste una ed una sola retta che li contiene entrambi** (fig. 1):



Questo postulato ci assicura che due punti sono sempre **allineati**, cioè appartengono ad una stessa retta.

La retta individuata dai due punti A e B (fig. 1) viene detta anche *retta congiungente* i punti A e B, o *retta passante* per A e B o, ancora, *retta AB*.

Il precedente postulato si suole anche enunciare dicendo che *per due punti distinti passa una ed una sola retta*.

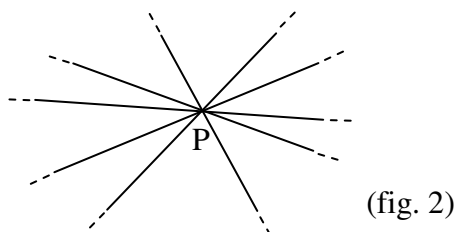
Dal precedente postulato discende il seguente corollario:

Due rette distinte non possono avere più di un punto in comune.

Infatti, se avessero due punti in comune, esse coinciderebbero.

- **Per un punto passano infinite rette.**

Detto P un punto del piano, l'insieme delle infinite rette passanti per P è chiamato **fascio di rette proprio** o, anche, **fascio di rette di centro P** (fig. 2):



(fig. 2)

- **Una retta può essere percorsa in due versi, l'uno opposto all'altro** (fig. 3):

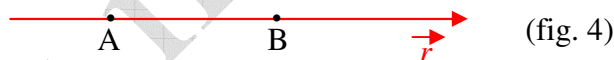


(fig. 3)

I punti di una retta si possono, quindi, pensare **ordinati** in due versi, uno opposto all'altro, in corrispondenza dei due versi secondo cui la retta può essere percorsa.

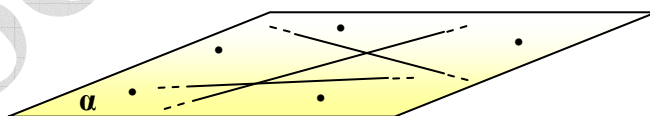
Fissato su r uno dei due versi di percorrenza (**retta orientata**) e considerati due punti A e B su r , è possibile dire se A precede B o se A segue B nel verso assegnato.

In fig. 4 si ha che A precede B (o B segue A):



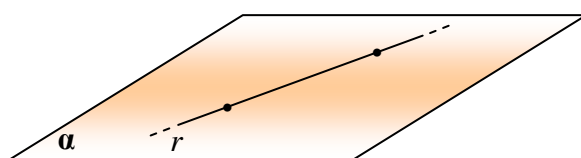
(fig. 4)

- **Su di un piano esistono infiniti punti ed infinite rette** (fig. 5):



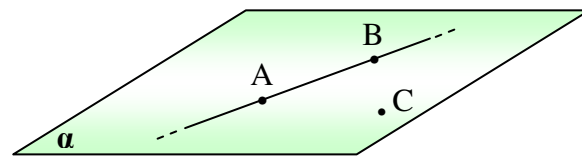
(fig. 5)

- **Se una retta r ha due punti in comune con un piano α , allora appartiene ad α** (fig. 6):



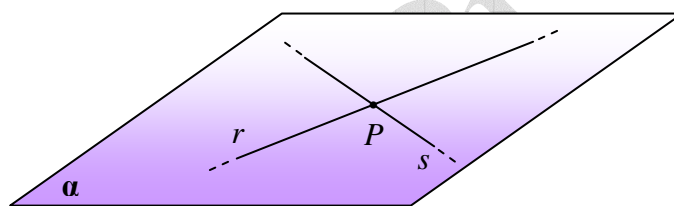
(fig. 6)

- Tre punti distinti che non appartengono ad una medesima retta individuano uno ed un solo piano (fig. 7):



(fig. 7)

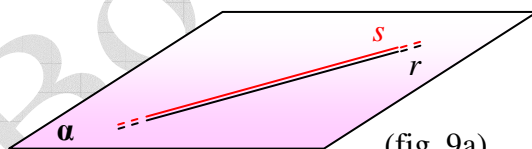
- Due rette si dicono **complanari** se appartengono a uno stesso piano, **sghembe** se appartengono a piani diversi.
- Due rette r ed s del piano si dicono **incidenti** se hanno in comune uno ed un solo punto P che prende il nome di *punto di incidenza* (o di *incontro*, o di *intersezione*) delle rette r ed s (fig. 8):



$$r \cap s = \{P\}$$

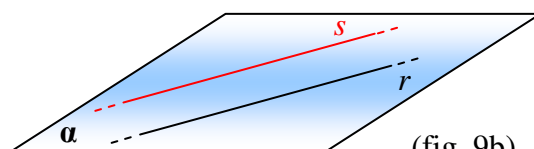
(fig. 8)

- Due rette r ed s del piano si dicono **parallele** se coincidono (fig. 9a) oppure se non hanno alcun punto in comune (fig. 9b):



$$r \equiv s$$

(fig. 9a)



$$r \cap s = \emptyset$$

(fig. 9b)

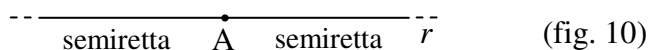
Per indicare che due rette r ed s sono parallele scriviamo $r \parallel s$, dove il simbolo \parallel è detto “simbolo di parallelismo”.

[Osserviamo che abbiamo assunto come parallele anche due rette coincidenti in quanto esse hanno in comune infiniti punti e non uno solo, così come richiesto per le rette incidenti].

Parleremo ampiamente del parallelismo in altra unità.

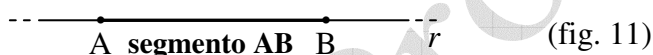
Seguono le definizioni di nuovi enti, a partire dagli enti elementari:

- **Semiretta** – Data una retta r e un suo punto A , si dice *semiretta*, di origine A , ciascuna delle due parti in cui r rimane divisa da A , compreso lo stesso punto A (fig. 10):



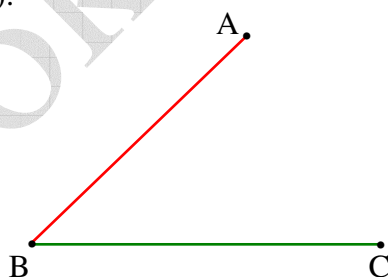
- **Segmento** – Un *segmento* è la parte di retta limitata da due suoi punti che si dicono estremi del segmento.

Il segmento di estremi A e B si indica con AB o con BA , cioè scrivendo una di seguito all'altra le lettere che indicano i suoi estremi (fig. 11):



Se i due estremi coincidono, il segmento è nullo ed è costituito da un solo punto $A \equiv B$ (non ci sono, quindi, punti interni).

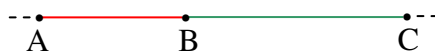
- **Segmenti consecutivi** – Due segmenti si dicono *consecutivi* se hanno solo un estremo in comune (fig. 12):



AB e BC segmenti consecutivi

(fig. 12)

- **Segmenti adiacenti** – Due segmenti si dicono *adiacenti* se sono consecutivi ed appartengono alla stessa retta (fig. 13):



AB e BC segmenti adiacenti

(fig. 13)