

BOOK IN PROGRESS
MATEMATICA

ALGEBRA
PRIMO ANNO
TOMO NR. 1

Book in Progress

SOMMARIO DEL TOMO 1

CAPITOLO 1: IL LINGUAGGIO DEGLI INSIEMI

1.1 Gli insiemi e la loro rappresentazione	pag. 1
1.2 I sottoinsiemi	pag. 6
1.3 Insieme delle parti	pag. 7
1.4 Operazioni tra insiemi	pag. 8
1.5 Esercizi di riepilogo	pag. 14
ESERCIZI CAPITOLO 1	pag. 19

CAPITOLO 2: GLI INSIEMI NUMERICI

2.1 Il concetto di numero e l'insieme dei numeri naturali	pag. 39
2.2 Operazioni in N	pag. 40
2.3 Divisibilità e numeri primi	pag. 47
2.4 Considerazioni sui numeri naturali	pag. 52
2.5 Il sistema binario	pag. 60
2.6 L'insieme Z	pag. 65
2.7 Operazioni in Z	pag. 69
2.8 L'insieme Q	pag. 75
2.9 Operazioni in Q_a	pag. 86
2.10 Operazioni in Q	pag. 89
2.11 Gli insiemi N, Z, Q	pag. 100
ESERCIZI CAPITOLO 2	pag. 103

CAPITOLO 3: LA LOGICA

3.1 Le proposizioni logiche e i principi della logica	pag. 147
3.2 Operazioni logiche	pag. 149
3.3 Espressioni logiche e tavole di verità	pag. 155

3.4	Tautologie e contraddizioni	pag. 159
3.5	Proposizioni logicamente equivalenti o equiveridiche	pag. 160
3.6	Proposizioni aperte	pag. 162
3.7	Schemi di ragionamento	pag. 170
ESERCIZI CAPITOLO 3		pag. 174

CAPITOLO 4: LE RELAZIONI

4.1	Le relazioni e la loro rappresentazione	pag. 187
4.2	Relazione inversa	pag. 192
4.3	Le relazioni in un insieme e le loro proprietà	pag. 193
4.4	Relazioni di equivalenza e relazioni d'ordine	pag. 196
4.5	Funzioni	pag. 202
4.6	Funzioni composte	pag. 208
4.7	Funzioni numeriche	pag. 211
ESERCIZI CAPITOLO 4		pag. 214

CAPITOLO 1

IL LINGUAGGIO DEGLI INSIEMI

1.1 Gli insiemi e la loro rappresentazione

La *teoria ingenua degli insiemi*¹ considera gli **insiemi** come collezioni ben definite di oggetti, indipendentemente dalla natura degli elementi che li costituiscono. Gli oggetti che formano un insieme, chiamati **elementi** dell'insieme, devono essere, quindi, distinguibili tra loro e individuabili senza ambiguità.

Così le seguenti collezioni di oggetti:

- i pianeti del sistema solare;
- le capitali europee;
- i numeri naturali;
- 3, a, Arno, 127, Roma, Tirreno;

costituiscono ognuna un insieme dal punto di vista matematico; per loro è infatti vera una delle due possibilità:

- un dato oggetto è un elemento dell'insieme considerato,
- un dato oggetto **non** è un elemento dell'insieme considerato.

Invece, le collezioni di oggetti:

- le ragazze carine dell'ITIS "E. Majorana" di Brindisi nel corrente a.s.;
- i segmenti del piano non troppo lunghi;
- alcuni numeri naturali;

non costituiscono esempi di insiemi per la matematica: nel primo caso la scelta è soggettiva, dipendente dal gusto personale; nel secondo caso non sappiamo cosa significhi "non troppo lunghi" per cui l'insieme non è ben definito; nel terzo caso la parola "alcuni" dà la possibilità di costruire collezioni di numeri tra loro diverse e, quindi, non si è in grado di determinare quali elementi appartengono al nostro "aspirante insieme" e quali no.

Per indicare gli insiemi utilizzeremo le lettere maiuscole dell'alfabeto: A , B , C , D , E , Seguiremo l'usuale convenzione di indicare con N l'insieme dei numeri naturali, con Z quello degli interi relativi, con Q quello dei razionali e con R quello dei reali.

Gli elementi di un insieme vengono indicati con le lettere minuscole dell'alfabeto: a , b , c , d , e ,

¹La *teoria ingenua (o intuitiva) degli insiemi* venne creata, alla fine del XIX secolo, principalmente dal matematico, russo di origine ma tedesco per formazione, Georg Cantor che aveva riformulato la matematica in modo da fondarla solo sulla nozione di insieme. Nei primi anni del XX secolo, la Matematica fu scossa sin dalle fondamenta dalla scoperta di contraddizioni, dette paradossi o antinomie, soprattutto nella teoria degli insiemi per cui, per superare tali

problemi, si ricorse all'assiomatizzazione della teoria degli insiemi, cioè ad assiomi che definivano gli insiemi e le operazioni che si potevano effettuare su di essi (*teoria assiomatica degli insiemi*).

Per indicare che a è un elemento dell'insieme A si utilizza la notazione simbolica:

$$a \in A \text{ (si legge “} a \text{ appartiene ad } A \text{”)}$$

Il simbolo \in è detto “simbolo di appartenenza”.

Per indicare che a **non** è un elemento dell'insieme A si utilizza la notazione simbolica:

$$a \notin A \text{ (si legge “} a \text{ non appartiene ad } A \text{”)}$$

Il simbolo \notin è detto “simbolo di non appartenenza”.

Intuitivamente diremo che un insieme è *finito* se è possibile elencarne tutti gli elementi, in caso contrario si parla di insieme *infinito*.

Inoltre, due insiemi A e B sono detti *uguali*, e scriveremo $A = B$, se hanno gli stessi elementi.

Un insieme può essere rappresentato in tre modi diversi:

✓ **rappresentazione tabulare (o per estensione o per elencazione):**

Secondo tale rappresentazione, gli elementi vengono scritti tutti all'interno di parentesi graffe, uno di seguito all'altro, separati da virgole o da punti e virgole.

Così, l'insieme A dei pianeti del sistema solare viene indicato nel seguente modo:

$$A = \{ \text{Mercurio, Venere, Terra, Marte, Giove, Saturno, Urano, Nettuno, Plutone} \}$$

(leggi “ A è l'insieme formato dagli elementi Mercurio, Venere, Terra,”),

mentre l'insieme B , formato dagli elementi $0, 1, 2, 3, 4$, viene indicato:

$$B = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}.$$

Osserviamo che riusciamo a rappresentare un insieme sotto forma tabulare soltanto se questo contiene un numero finito di elementi.

L'insieme N dei numeri naturali può, comunque, essere indicato:

$$N = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots \},$$

scrivendo, cioè, i “primi” elementi dell'insieme e, poi, aggiungendo i puntini di sospensione; analogamente, quando non si generano ambiguità, potremo procedere per altri insiemi,.

Gli elementi di un insieme possono essere elencati in un ordine qualsiasi; così:

$$\{ 1, 2 \} = \{ 2, 1 \};$$

ed è, inoltre, irrilevante la ripetizione (*molteplicità*) degli elementi; cioè:

$$\{ 1, 2, 2 \} = \{ 1, 1, 1, 2 \} = \{ 1, 2 \},$$

in quanto gli insiemi risultano uguali perché tutti formati dagli stessi elementi.

✓ **rappresentazione per proprietà caratteristica:**

Per indicare l'insieme X dei numeri naturali multipli di 3 possiamo scrivere:

$$X = \{ \text{numeri naturali multipli di } 3 \},$$

oppure, utilizzando i simboli del linguaggio matematico:

$$X = \{ x / x = 3 \cdot n, n \in N \}$$

che si legge: “ X è l’insieme degli x tali che $x = 3 \cdot n$, con n appartenente all’insieme dei numeri naturali”. In questo modo X è stato rappresentato per proprietà caratteristica.

La rappresentazione per proprietà caratteristica di un insieme consiste nell’individuare, in modo inequivocabile, attraverso la proprietà che caratterizza *tutti e soli* i suoi elementi.

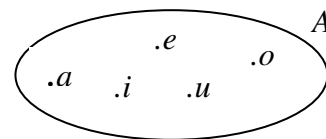
Questo metodo è utile, soprattutto, nel caso in cui l’insieme da rappresentare sia infinito o contenga un numero elevato di elementi.

✓ **rappresentazione grafica:**

Un insieme può essere rappresentato graficamente mediante i diagrammi di **Venn** (detti anche diagrammi di **Eulero – Venn**).

Per rappresentare un insieme con i diagrammi di Eulero – Venn si disegna una linea chiusa, al cui interno vengono posti gli elementi appartenenti all’insieme; all’esterno, eventuali *oggetti* che non vi appartengono.

Così, l’insieme A delle vocali dell’alfabeto italiano viene rappresentato come in figura:



Consideriamo ora l’insieme

$$X = \{ x \in N / x^2 = 2 \},$$

cioè l’insieme dei numeri naturali il cui quadrato è uguale a 2. Quali numeri appartengono ad X ? Nessuno; infatti:

$$0^2 = 0 ; 1^2 = 1 ; 2^2 = 4 ; 3^2 = 9 ; \dots\dots\dots$$

Quindi X è un insieme che **non contiene alcun elemento**: è l’*insieme vuoto*, indicato con il simbolo \emptyset oppure con $\{ \}$.



ATTENZIONE

$a \neq \{a\}$ in quanto “ a ” è un elemento di un dato insieme mentre $\{a\}$ è un insieme il cui unico elemento è a .

Così: $\{\emptyset\}$ non è la rappresentazione dell'insieme vuoto, ma rappresenta l'insieme il cui unico elemento è l'insieme vuoto.

Esempi

- a) I numeri pari sono i multipli di 2 e i numeri dispari sono i successivi dei numeri pari; pertanto:

- la rappresentazione per caratteristica dell'insieme dei numeri pari è

$$P = \left\{ x / x = 2 \cdot n, \quad n \in \mathbb{N} \right\}$$

- la rappresentazione per caratteristica dell'insieme dei numeri dispari è

$$D = \left\{ x / x = 2 \cdot n + 1, \quad n \in \mathbb{N} \right\}.$$

- b) Rappresentiamo in forma tabulare e grafica l'insieme

$$A = \left\{ x \in \mathbb{N} / x = 3k - 2, \quad k = 0, 1, 3, 5 \right\}.$$

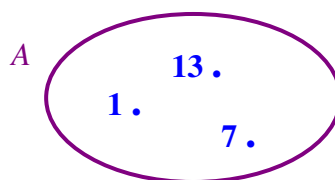
Gli elementi dell'insieme A sono i numeri naturali ottenuti sostituendo alla lettera k , uno alla volta, i numeri 0, 1, 3, 5 così come indicato nell'insieme; pertanto:

- se $k = 0$: $x = 3 \cdot 0 - 2 = 0 - 2 = -2$; ma $-2 \notin \mathbb{N}$, quindi $-2 \notin A$;
- se $k = 1$: $x = 3 \cdot 1 - 2 = 3 - 2 = 1$; e $1 \in \mathbb{N}$, quindi $1 \in A$;
- se $k = 3$: $x = 3 \cdot 3 - 2 = 9 - 2 = 7$; e $7 \in \mathbb{N}$, quindi $7 \in A$;
- se $k = 5$: $x = 3 \cdot 5 - 2 = 15 - 2 = 13$; e $13 \in \mathbb{N}$, quindi $13 \in A$.

La rappresentazione tabulare di A è quindi:

$$A = \{1, 7, 13\}$$

La rappresentazione grafica di A è la seguente:



- Rappresentiamo in forma tabulare e mediante i diagrammi di Eulero - Venn l'insieme

$$T = \left\{ x \in \mathbb{Z} / x = \frac{a-5}{2}, \quad a \in \mathbb{N} \text{ e } 1 < a \leq 5 \right\}.$$

Prima di tutto determiniamo i valori da assegnare alla lettera a .

La condizione “ $1 < a \leq 5$, con $a \in \mathbf{N}$ ”, indica che ad a devono essere assegnati i valori da 1 a 5, escluso 1 ed incluso 5; ad a si attribuiscono, allora, i valori 2, 3, 4, 5.

Gli elementi dell'insieme T sono, quindi, i numeri interi ottenuti sostituendo alla lettera a , uno alla volta, i numeri naturali appena determinati:

$$- \text{ se } a = 2, \quad x = \frac{2-5}{2} = -\frac{3}{2}, \quad \text{ma } -\frac{3}{2} \notin \mathbf{Z}, \text{ quindi } -\frac{3}{2} \notin T$$

$$- \text{ se } a = 3, \quad x = \frac{3-5}{2} = -\frac{2}{2} = -1, \quad \text{e } -1 \in \mathbf{Z}, \text{ quindi } -1 \in T$$

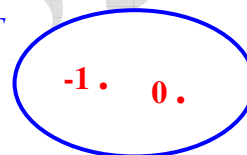
$$- \text{ se } a = 4, \quad x = \frac{4-5}{2} = -\frac{1}{2}, \quad \text{ma } -\frac{1}{2} \notin \mathbf{Z}, \text{ quindi } -\frac{1}{2} \notin T$$

$$- \text{ se } a = 5, \quad x = \frac{5-5}{2} = \frac{0}{2} = 0 \quad \text{e } 0 \in \mathbf{Z}, \text{ quindi } 0 \in T$$

La rappresentazione tabulare di T è, dunque:

$$T = \{-1, 0\}$$

La rappresentazione grafica di T è la seguente:



ATTENZIONE

Sia $A = \{x \in \mathbf{N} / x = 5k - 2 \text{ e } -1 \leq k < 6\}$.

L'insieme A non è “ben definito” perché non è stato indicato a quale insieme numerico appartiene k .

Non possiamo, quindi, rappresentare l'insieme A .

PROVA TU

1) Rappresenta in forma tabulare e mediante i diagrammi di Eulero - Venn i seguenti insiemi:

$$A = \left\{ x / x \text{ è una vocale della parola "parco"} \right\}$$

$$B = \left\{ x \in \mathbf{N} / x = \frac{2k+1}{3}, \quad k = 1, 3, 4, 6, 7 \right\}$$

$$C = \{x / x \in \mathbf{N} \text{ e } x < 9\}$$

$$D = \left\{ x \in \mathbf{Z} / x = \frac{2m^2+1}{m-1}, \quad m \in \mathbf{Z} \text{ e } -2 \leq m \leq 3 \right\}$$

2) Dati gli insiemi:

$$A = \{3, 6, 9, 12\} \quad \text{e} \quad B = \{a, e, i, o, u\},$$

rappresentali per proprietà caratteristica.

1.2 I sottoinsiemi

Definizione:

Si dice che un insieme A è un **sottoinsieme** di un insieme B se tutti gli elementi di A sono elementi di B e si scrive:

$$A \subseteq B \text{ (leggi "A contenuto in B" o "A incluso in B" o, ancora, "A sottoinsieme di B")},$$

oppure

$$B \supseteq A \text{ (leggi anche "B contiene A" o "B include A")}.$$

Un sottoinsieme A di B si dice **proprio** se esiste almeno un elemento di B che non appartiene ad A e scriveremo:

$$A \subset B \text{ (leggi "A contenuto strettamente in B" o "A incluso strettamente in B" o, ancora, "A sottoinsieme proprio di B")},$$

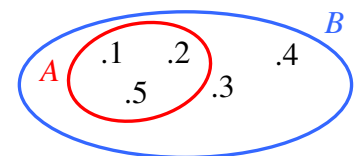
oppure

$$B \supset A \text{ (leggi anche "B include strettamente A")}.$$

Esempio

Dati gli insiemi $A = \{1, 2, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, si ha che A è un sottoinsieme di B perché tutti gli elementi di A sono anche elementi di B , quindi $A \subseteq B$.

Poiché esiste almeno un elemento di B (3 e/o 4) che non appartiene ad A , si ha che A è un sottoinsieme proprio di B , cioè $A \subset B$.



In base alla definizione data, si ha che ogni insieme A è sottoinsieme di se stesso perché tutti gli elementi di A appartengono ad A .

Possiamo quindi scrivere:

$$A \subseteq A.$$

Tra i sottoinsiemi di un insieme consideriamo anche l'insieme vuoto. Per la sua particolare caratteristica di non contenere elementi, si conviene di considerare l'insieme vuoto come sottoinsieme di un qualsiasi insieme.

Possiamo quindi scrivere:

$$\emptyset \subseteq A, \text{ qualunque sia l'insieme } A.$$

In generale:

dato un insieme A , sono chiamati **sottoinsiemi impropri** (o **banali**) di A l'insieme A stesso e l'insieme vuoto.

Si può facilmente osservare che c'è una certa analogia tra i simboli \subseteq e \subset ed i simboli \leq e $<$, così come tra i simboli \supseteq e \supset ed i simboli \geq e $>$.

Il simbolo " $\not\subset$ " significa "non è sottoinsieme"; per esempio, dati gli insiemi:

$$F = \{2, a, 5, 7, b\} \quad \text{e} \quad G = \{2, s, 5, b, 3\}$$

sia ha che $F \not\subset G$ (F non è sottoinsieme di G) e che $G \not\subset F$ (G non è sottoinsieme di F) [osserva gli elementi dei due insiemi].

PROVA TU

Rappresenta con i diagrammi di Eulero – Venn gli insiemi

$$A = \{x / x \text{ è un numero pari minore di } 18\} \text{ e } B = \{x / x \text{ è un multiplo di } 4 \text{ minore di } 20\}$$

e stabilisci se le seguenti affermazioni sono vere o false:

$$A \supset B \quad \text{V} \quad \text{F}$$

$$A \subseteq B \quad \text{V} \quad \text{F}$$

$$B \subseteq A \quad \text{V} \quad \text{F}$$

$$B \subset A \quad \text{V} \quad \text{F}$$

1.3 Insieme delle parti

Definizione

Dato un insieme A , si chiama **insieme delle parti** di A e si indica con $\mathcal{P}(A)$, l'insieme di tutti i sottoinsiemi, propri e impropri, di A .

Esempio

Dato l'insieme $A = \{a, b, c\}$, l'insieme delle parti di A è:

$$\mathcal{P}(A) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \emptyset, \{a, b, c\}\}.$$

Quanti sono gli elementi di $\mathcal{P}(A)$? Gli elementi di $\mathcal{P}(A)$ sono _____.

PROVA TU

- Sia $B = \{a, e\}$; $\mathcal{P}(B) =$ _____
- Quanti elementi ha $\mathcal{P}(B)$? _____
- Sia $C = \{2, m, 5\}$; $\mathcal{P}(C) =$ _____
- Quanti elementi ha $\mathcal{P}(C)$? _____
- Sia $D = \{3, 6, 9, 15\}$; $\mathcal{P}(D) =$ _____